自然数全体の集合の非単項超フィルターによる超冪の濃度について

本稿では、自然数の集合 $\mathbb{N}$ の非単項超フィルター (non-principal ultrafilter) U による超冪 (ultrapower) ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/U$ の濃度が、連続体濃度 (cardinality of the continuum) $2^{\aleph_0}$ に一致することを示します。この事実は、超準解析 (nonstandard analysis) やモデル理論 (model theory) において、無限小や無限大を含む超実数体の基盤となる重要な定理です。理解を深めるため、フィルターや超冪の基本定義から始め、具体的な例を交えながら、Cantor-Bernstein-Schröder の定理を用いた厳密な証明を展開します。

1. 基本概念の定義

定義 1 (フィルター)

集合 X 上のフィルター (filter) とは、X の部分集合の族 $F \subset \mathcal{P}(X)$ であり、以下の条件を満たすものである：

- $X \in F$ かつ $\varnothing \notin F$。
- $A, B \in F$ ならば $A \cap B \in F$。
- $A \in F$ かつ $A \subset B \subset X$ ならば $B \in F$。

定義 2 (超フィルター)

X 上のフィルター U が超フィルター (ultrafilter) であるとは、任意の $A \subset X$ に対して、$A \in U$ または $X \setminus A \in U$ のいずれか一方が成り立つことである。これは、包含関係に関して極大なフィルターであることと同値である。

定義 3 (単項超フィルターと非単項超フィルター)

X 上の超フィルター U について、ある点 $x \in X$ が存在して $U = \{A \subset X \mid x \in A\}$ と表せるとき、U を単項超フィルター (principal ultrafilter) と呼ぶ。そうでないとき、U を非単項超フィルター (non-principal ultrafilter) または自由超フィルター (free ultrafilter) と呼ぶ。

非単項超フィルターは、すべての余有限集合（補集合が有限である集合）を要素として含むという重要な性質を持っています。具体的な例を以下に示します。

例 1 (余有限フィルターと非単項超フィルター)

$X = \mathbb{N}$ とし、有限集合の補集合全体の族 $F_{\text{cf}} = \{A \subset \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ は有限集合}\}$ を考えると、これはフィルターとなる。これを余有限フィルター (cofinite filter) または Fréchet フィルターと呼ぶ。Zorn の補題を用いることで、F_{cf} を含む極大フィルター（すなわち超フィルター） U の存在が示される。この U は有限集合を一切含まないため、非単項超フィルターとなる。

定義 4 (超冪の構成)

X を集合、U を $\mathbb{N}$ 上の超フィルターとする。関数集合 $X^{\mathbb{N}}$ 上に、二つの関数 $f, g \in X^{\mathbb{N}}$ に対して、同値関係 $\equiv_U$ を以下のように定義する：

$$f \equiv_U g \iff \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = g(n)\} \in U$$

この同値関係による商集合 $X^{\mathbb{N}}/U$ を、X の U による超冪 (ultrapower) と呼び、${}^*X$ と表記する。各 $f \in X^{\mathbb{N}}$ の同値類を $[f]_U$ と書く。

注意 (超不連結空間との関連): 超フィルター全体の空間、すなわち $\mathbb{N}$ の Stone-Čech コンパクト化 $\beta\mathbb{N}$ は、位相空間論において、任意の開集合の閉包が開かつ閉 (clopen) になる空間、すなわち超不連結 (extremally disconnected) な空間の代表例として知られています。

2. 主定理とその証明

定理

$\mathbb{N}$ の非単項超フィルター U による超冪 ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/U$ の濃度は $2^{\aleph_0}$ である。

証明. Cantor-Bernstein-Schröder の定理を用いる。すなわち、$|{}^*\mathbb{N}| \le 2^{\aleph_0}$ （濃度の意味での不等式 $\le$）と $|{}^*\mathbb{N}| \ge 2^{\aleph_0}$ の両方を示す。

(1) 上限 $|{}^*\mathbb{N}| \le 2^{\aleph_0}$ の証明：
超冪 ${}^*\mathbb{N}$ は、関数集合 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の同値関係 $\equiv_U$ による商集合である。商集合の濃度は元の集合の濃度以下であるから、

$$|{}^*\mathbb{N}| \le |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$$

が成り立つ。ここで、$\mathbb{N}$ の濃度は $\aleph_0$ であり、$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の濃度は次のように計算される：

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0}$$

集合論の基本関係より $\aleph_0 \le 2^{\aleph_0}$ であるから、

$$2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0} \le (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

となり、$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$ を得る。したがって、

$$|{}^*\mathbb{N}| \leq 2^{\aleph_0}$$

が成立する。

(2) 下限 $|{}^*\mathbb{N}| \geq 2^{\aleph_0}$ の証明：
${}^*\mathbb{N}$ の濃度が少なくとも $2^{\aleph_0}$ であることを示すために、無限二進列の全体 $2^{\mathbb{N}}$ （濃度は $2^{\aleph_0}$）から ${}^*\mathbb{N}$ への単射を構成する。 便宜上、超冪の添字集合を $\mathbb{N}$ と対等な可算無限集合 D に置き換えて議論を進める。D を以下のような有限二進列の直和として定義する：

$$D = \bigcup_{n=1}^{\omega} \{n\} \times \{0,1\}^n$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、$\{0,1\}^n$ は長さ n の二進列全体の集合であり、その大きさは 2^n である。したがって D は可算無限集合の可算和であり、$\mathbb{N}$ と対等である。$\mathbb{N}$ 上の非単項超フィルター U は、D 上の非単項超フィルター（有限集合を一切含まない超フィルター）と同型に対応させることができる。以下では、この D 上の超フィルターを改めて U とおく。 各 $n \in \mathbb{N}$ について、$\{0,1\}^n$ から $\mathbb{N}$ への単射 ϕ_n を任意に一つ固定する。例えば、二進表現に 1 を加えることで、値域を $\{1, 2, \ldots, 2^n\} \subset \mathbb{N}$ とすることができる。 ここで、任意の無限二進列 $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ （すなわち $\alpha : \mathbb{N} \to \{0,1\}$）に対し、関数 $f_\alpha : D \to \mathbb{N}$ を以下のように定義する。 $\alpha \restriction n \in \{0,1\}^n$ を α の最初の n ビットからなる有限列とする。$(n, s) \in D$ （ただし $s \in \{0,1\}^n$）に対して、

$$f_\alpha(n, s) = \phi_n(s \oplus (\alpha \restriction n))$$

と定める。ここで $\oplus$ は長さ n のビット列同士の成分ごとの排他的論理和（ $\pmod 2$ の加算）を表す。 いま、相異なる二つの無限二進列 $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$ ($\alpha \neq \beta$) を任意に選ぶ。$\alpha \neq \beta$ であるから、ある最小の自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$\alpha(N) \neq \beta(N)$ となる。これにより、任意の $n \geq N$ に対して、初期切断は不一致となる：

$$\alpha \restriction n \neq \beta \restriction n$$

排他的論理和の性質から、任意の $s \in \{0,1\}^n$ に対して、

$$s \oplus (\alpha \restriction n) = s \oplus (\beta \restriction n) \iff \alpha \restriction n = \beta \restriction n$$

が成り立つ。いま $n \geq N$ において $\alpha \restriction n \neq \beta \restriction n$ であるため、すべての $s \in \{0,1\}^n$ について、

$$s \oplus (\alpha \restriction n) \neq s \oplus (\beta \restriction n)$$

が成り立つ。ϕ_n は単射であるから、両辺を ϕ_n で移した値も異なる：

$$\phi_n(s \oplus (\alpha \restriction n)) \neq \phi_n(s \oplus (\beta \restriction n))$$

すなわち、任意の $n \geq N$ および任意の $s \in \{0,1\}^n$ に対して、

$$f_\alpha(n, s) \neq f_\beta(n, s)$$

が成立する。 二つの関数 f_α と f_β が一致するようなドメイン D の元の集合を E とおくと、上の議論から、

$$E = \{(n, s) \in D \mid f_\alpha(n, s) = f_\beta(n, s)\} \subset \bigcup_{n=1}^{N-1} \{n\} \times \{0, 1\}^n$$

となる。右辺は有限集合の有限個の和集合であるため、有限集合である。したがって、その部分集合である E も有限集合である。 U は非単項超フィルターであるため、いかなる有限集合も要素として持たない。ゆえに、

$$E \setminus \varnothing = E \notin U$$

である。超冪における同値関係 $\equiv_U$ の定義より、

$$f_\alpha \equiv_U f_\beta \iff E \in U$$

であるから、$E \notin U$ より $f_\alpha \not\equiv_U f_\beta$ を得る。 これにより、対応 $\alpha \mapsto [f_\alpha]_U$ は、濃度 $2^{\aleph_0}$ の集合 $2^{\mathbb{N}}$ から超冪 ${}^*\mathbb{N}$ への単射となる。したがって、

$$|{}^*\mathbb{N}| \geq |2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$$

が示された。

以上、(1) および (2) より、Cantor-Bernstein-Schröder の定理から、

$$|{}^*\mathbb{N}| = 2^{\aleph_0}$$

であることが証明された。 (証明終)

3. 補足と応用

ウルトラプロダクト (ultraproduct) やウルトラフィルターの理論において、可算な代数構造の非単項超フィルターによる超冪をとると、その濃度が連続体濃度へと「ジャンプ」することは極めて普遍的な性質です。例えば、実数体 $\mathbb{R}$ の超冪 ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U$ もまた濃度 $2^{\aleph_0}$ を持ちます。これは、超実数体 ${}^*\mathbb{R}$ が標準的な実数体 $\mathbb{R}$ よりも遥かに多くの元（無限大や無限小）を含むにもかかわらず、集合としての濃度自体は $\mathbb{R}$ と同じ連続体濃度にとどまることを意味しており、超準解析のモデルを構築・運用する上で決定的な役割を果たしています。

参考文献

[1] Chang, C. C., & Keisler, H. J. (1990). *Model Theory* (3rd ed.). Elsevier.

[2] Jech, T. (2003). *Set Theory* (The Third Millennium Edition). Springer.

[3] Comfort, W. W., & Negrepontis, S. (1974). *The Theory of Ultrafilters*. Springer-Verlag.